АННОТАЦИЯ

к диссертации **Бекенаевой Кымбат Сламовны**

на соискание степени доктора философии (PhD)

по образовательной программе 8D05401 – Математика

Тема исследования: Разрешимость начально-краевых задач для псевдопараболического уравнения дробного порядка.

Цель исследования: изучение вопросов однозначной разрешимости начально-краевых задач для квазилинейного псевдопараболического уравнения дробного порядка с линейными и нелинейными граничными условиями. Установление теоремы о существовании и единственности слабого обобщенного решения задач, доказательство разрушения решения задачи для квазилинейного псевдопараболического уравнения дробного порядка с линейным граничным условием и изучение асимптотического поведения решения по времени.

Задачи исследования.

Для задачи с линейным граничным условием для псевдопараболического уравнения с дробной производной Капуто:

– постановка и исследование разрешимости задачи для различных случаев степени положительных постоянных p и q:

I случай, когда $0<q\le 1,\ 2<p<\dfrac{2N}{N-2}$, для всех $N\ge 3$;

II случай, когда $1\le q\le 1+\dfrac{2}{N},\ 2<p<\dfrac{2N}{N-2}$, для всех $N\ge 3$;

III случай, когда $0<q\le 1,\ 1<p\le 2$, для всех $N\ge 3$;

IV случай, когда $1\le q\le 1+\dfrac{2}{N},\ 1<p\le 2$ для всех $N\ge 3$;

– доказательство существования слабого обобщенного решения задачи для случаев I - IV;

– доказательство единственности слабого решения рассматриваемой задачи для случая II;

– разрушение решения задачи за конечное время;

– доказательство разрешимости задачи для любого конечного времени t при $1<p\le 2$;

– изучение асимптотического поведения решения по времени $t\to\infty$.

Для задачи с нелинейным граничным условием для псевдопараболического уравнения с дробной производной Капуто:

– формулировка и исследование однозначной разрешимости краевой задачи при наличии нелинейности как в самом уравнении, так и граничном условии;

– доказательство локальной разрешимости задачи для случая $2<p<\dfrac{2n}{n-2},\ 2<\sigma<\dfrac{2(n-1)}{n-2},\ n\ge 3$;

– доказательство единственности локального решения задачи при $2 < p < \frac{2n}{n-2}, n \geq 3$;

– доказательство единственности глобального решения задачи при условии $1 < p \leq 2$, и дополнительно, теорема о существовании глобального решения задачи при $1 < \sigma < \frac{2(n-1)}{n-2}, n \geq 3$;

– постановка и изучение вопросов разрешимости начально-краевой задачи для линейного псевдопараболического нагруженного уравнения дробного порядка по пространственной переменной.

Методы исследования. В ходе достижения результатов исследования были применены метод приближения Галеркина, метод априорных оценок, теория соболевских пространств, методы интегрального и дифференциального исчислений, метод функционального анализа, метод компактности, метод монотонности, метод неравенств для производных дробного порядка, аналитические и функциональные методы для дробного исчисления.

Основные положения, выносимые на защиту (доказанные научные гипотезы и другие выводы, являющиеся новыми знаниями). По результатам исследования на защиту выносятся следующие положения:

1) Установление и доказательство теоремы о существовании и единственности слабого обобщенного решения задачи с линейным граничным условием для квазилинейного псевдопараболического уравнения с дробной производной Капуто.
2) Доказательство разрушения решения задачи за конечное время.
3) Изучение асимптотического поведения решения по времени.
4) Формулировка и доказательство теоремы о существовании и единственности слабого решения задачи с нелинейным граничным условием для псевдопараболического уравнения с дробной производной Капуто.
5) Доказательство разрешимости начально-краевой задачи для нагруженного псевдопараболического уравнения с дробной производной Капуто.

Основные результаты исследования.

1. Рассмотрена разрешимость начально-краевой задачи с линейным граничным условием для псевдопараболического уравнения с дробной производной Капуто. Исследовано существование слабого решения с помощью приближений Галеркина и априорных оценок, доказана единственность слабого решения задачи посредством применения теоремы вложения Соболева, теоремы Реллиха-Кондрашова и леммы Гронуолла-Беллмана. Также проведен анализ и доказано разрушения решения задачи за конечное время, что само решение стремится к бесконечности при $t \to T^*$ на некотором множестве Ω значений *x*. Изучена глобальная разрешимость начально-краевой задачи и единственность слабого обобщенного решения.

2. Исследована разрешимость начально-краевых задач для квазилинейного псевдопараболического уравнения дробного порядка с достаточно гладкой границей. Отличие исследуемых задач заключается в том, что граничные условия задаются в виде нелинейного граничного условия с оператором дробного

дифференцирования. Основным результатом является установление локальной либо глобальной разрешимости поставленных задач в зависимости от параметров уравнения. С помощью метода Галеркина доказано существование слабого решения квазилинейного псевдопараболического уравнения в ограниченной области. Используя теоремы вложения Соболева, получены априорные оценки решения. При доказательстве существования искомых решений рассматриваемых краевых задач используются априорные оценки и теорема Реллиха-Кондрашова. Доказана единственность слабых обобщенных решений начально-краевых задач на основе полученных априорных оценок и применения обобщенной леммы Гронуолла.

3. Рассмотрена начально-краевая задача для нагруженного псевдопараболического уравнения с дробной производной Капуто. Сформулирована и доказана теорема существования решения задачи.

Обоснование новизны и важности полученных результатов.

Обоснование новизны первых результатов научного исследования состоит в том, что в данной работе изучены вопросы однозначной разрешимости начально-краевых задач для квазилинейного псевдопараболического уравнения дробного порядка с линейными и нелинейными граничными условиями с операторами дробного дифференцирования Капуто и доказаны: теорема существования слабого решения задачи для квазилинейного псевдопараболического уравнения с линейным граничным условием для случаев I-IV, теорема единственности слабого решения задачи для псевдопараболического уравнения с линейным условием для случая II, разрушение решения за конечное время; исследовано асимптотическое поведение решения по времени.

Обоснованием новизны вторых результатов диссертационной работы служит формулировка и исследование вопросов однозначной разрешимости краевых задач, отличие которых заключается в том, что операторы дробного дифференцирования участвуют как в самом уравнении, так и в граничном условии в виде нелинейного условия; для случая $2 < p < \frac{2n}{n-2}$, $2 < \sigma < \frac{2(n-1)}{n-2}$, $n \geq 3$, доказана теорема о локальной разрешимости задачи; доказана теорема единственности локального решения задачи, если выполнены условия $2 < p < \frac{2n}{n-2}$, $n \geq 3$; доказана теорема об единственности глобального решения задачи при условии $1 < p \leq 2$, и дополнительно, теорема о существовании глобального решения задачи при выполнении условий $1 < \sigma < \frac{2(n-1)}{n-2}$, $n \geq 3$.

Обоснование новизны третьего результата – это формулировка и доказательство теоремы существования решения начально-краевой задачи для нагруженного псевдопараболического уравнения с дробной производной Капуто. Задача для нагруженного уравнения по пространственной переменной для линейного псевдопараболического уравнения с начальным и вторым краевыми условиями сводится к нагруженному уравнению с нелокальным краевым условием. Разрешимость задачи доказывается с помощью метода продолжения по параметру.

Основные положения были получены путем подробных доказательств, приведенными в исследовательской работе на основе ранее полученных известными учеными результатов, а также достоверность и новизна результатов работы может быть подтверждена их публикацией в рейтинговых рецензируемых изданиях, входящих в международные наукометрические базы Web of Science Core Collection и Scopus.

Соответствие направлениям развития науки или государственным программам:

Государственная программа развития образования и науки РК на 2020 - 2025 годы (№988 от 27 декабря 2019 года); Концепции развития науки Республики Казахстан на 2022 - 2026 годы (Постановление Правительства Республики Казахстан № 336 от 25 мая 2022 года).

Описание вклада докторанта в подготовку каждого издания:

По теме диссертации опубликовано 4 научных работ, из них 2 в зарубежных изданиях, вошедших в базы Scopus и Web of Science:

1. Solvability Issues of a Pseudo-Parabolic Fractional Order Equation with a Nonlinear Boundary Condition // Fractal and Fractional – 2021. Vol 5, No. 4, 134; (Co-authors: Aitzhanov, S.E., Berdyshev, A.S., 60%) (IF –3.167; WoS - Q1, Scopus – 87). doi: https://doi.org/10.3390/fractalfract5040134. В работе соискателем доказаны теоремы существования и единственности локального обобщенного решения для квазилинейного псевдопараболического уравнения дробного порядка с нелинейным условием;
2. Solvability of pseudoparabolic equation with Caputo fractional derivative // Chaos, Solitons and Fractals – 2022, Vol 160, 112193; (Co-authors: Aitzhanov, S.E., Kusherbayeva U.R., 85%) (IF –9.92; WoS - Q1, Scopus - 99). https://doi.org/10.1016/j.chaos.2022.112193. В статье докторантом доказаны теоремы о существовании и единственности слабого обобщенного решения задачи с линейным граничным условием для псевдопараболического уравнения с дробной производной Капуто, а также доказано разрушение решения задачи за конечное время;
3. Boundary value problems for pseudo-parabolic equation with fractional order derivatives, Absrtacts of the Uzbekistan-Malaysia conference «Computational models and technologies», September 16-17th, 2022, P.142-143. (Co-authors: Aitzhanov S.E., Berdyshev A.S., 90%);
4. Разрешимость уравнения Соболева с дробной производной Капуто, Тезисы докладов международной научной конференции «Неклассические уравнения математической физики», Ташкент, 6-8 октября, 2022 г., С.78-79. (Соавторы: Байшемиров Ж.Д., 90%).